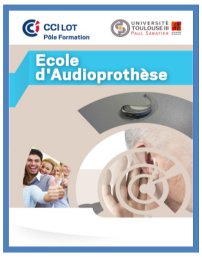
Juin 2017



Première année : mathématiques

Contrôle terminal – 2h

Tout document interdit ; calculatrice autorisée

Questions de cours

Donner les composantes du produit vectoriel $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}$, avec les vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de composantes cartésiennes (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z). Un troisième vecteur $\boldsymbol{C}$ est de composantes (C_x, C_y, C_z) ; calculer $(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}).\boldsymbol{C}$ que l'on comparera à $\boldsymbol{C}.(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})$.

Champ magnétique

Une particule de charge q et de masse m est soumise à un champ magnétique constant $\boldsymbol{B}(0, 0, B)$. Elle subit alors la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}$, et son mouvement est décrit par l'équation $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{v}$ désigne la vitesse de la particule et $\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{v} / \mathrm{d}t$ son accélération.

Ecrire en fonction des coordonnées (v_x, v_y, v_z) de $\boldsymbol{v}$ les équations correspondantes. Les résoudre. A quoi ressemble la trajectoire de la particule ?

Différentielle

Si on pose pour $x > 0$, $y = x^2$, déterminer la différentielle dy en fonction de x et dx, puis dx en fonction de y et de dy. Même question pour $y = \tan x$ pour $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Loi normale

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si et seulement si, pour tout x réel : $p(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$. On admet que l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\,dr$ vaut $\sqrt{\pi}$.

1. Calculer l'espérance définie par l'intégrale $E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$ ainsi que la variance $Var(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$ de cette loi.
2. Si k est un réel fixé quelconque, montrer que $Y = X/k$ suit une loi normale de paramètres μ/k et σ^2/k^2.